Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

ІМОВІРНІСНІ ОСНОВИ ОБРОБКИ ДАНИХ

Практикум для студентів спеціальностей

153 – Мікро- та наносистемна техніка

171 – Електроніка

Київ
НТУУ «КПІ»
2015

Імовірнісні основи обробки даних: Практикум для студентів спеціальностей 153 – Мікро- та наносистемна техніка, 171 – Електроніка / Уклад.: В.С. Берегун, О.В. Гармаш. – К.: НТУУ «КПІ», 2015. – 64 с.

Гриф надано Вченою радою факультету електроніки
(Протокол № 12/2015 від 21 грудня 2015 р.)

Н а в ч а л ь н е   в и д а н н я

ІМОВІРНІСНІ ОСНОВИ ОБРОБКИ ДАНИХ

Практикум

Укладачі: *Берегун Віктор Сергійович*, к.т.н.
Гармаш Оксана Вікторівна, к.т.н.

Відповідальний
редактор к.т.н. Берегун В.С.
Рецензент к.т.н., доц. Родіонова М.В.

За редакцією укладачів

ЗМІСТ

ВСТУП

Сучасні інженери в галузі електроніки повинні мати уявлення про обробку випадкових даних, які є невід'ємною частиною результатів вимірювань. Базові знання, вміння та навички вирішення типових задач студенти отримують при вивченні дисципліни «Імовірнісні основи обробки даних».

У результаті вивчення дисципліни студенти повинні:

<u>знати</u>:

1) основні поняття і визначення теорії імовірностей та математичної статистики;

2) основні імовірнісні моделі, що використовуються при рішенні прикладних задач;

3) основні статистичні методи і прийоми обробки експериментальних даних;

<u>вміти</u>:

1) обчислювати основні імовірнісні характеристики випадкових величин;

2) вміти проводити статистичний аналіз експериментальних даних;

<u>набути навички</u> розв'язування типових прикладних задач теорії імовірностей та математичної статистики.

Суттєву роль для засвоєння дисципліни відіграє самостійна робота студентів, яка полягає в неперервному вивченні теоретичних відомостей, виконанні поточних завдань та розрахунково-графічної роботи.

Практикум охоплює 36 аудиторних годин і містить основні контрольні питання та типові задачі до кожної теми.

ТЕМА 1. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ. УРНОВА СХЕМА

Контрольні питання

1. Які моделі використовуються при вивченні фізичних явищ і що вони собою являють?
2. Як розрізняються детерміновані та випадкові явища? Наведіть приклади.
3. Дайте означення масових випадкових явищ. Наведіть приклад.
4. Як визначається відносна частота? Чому відносна частота – випадкова величина?
5. Сформулюйте властивості стійкості відносної частоти.
6. Які питання вирішує теорія імовірностей?
7. Які питання вирішує математична статистика?
8. Що вивчає комбінаторика?
9. Сформулюйте правило додавання. Наведіть приклад використання.
10. Сформулюйте правило множення. Наведіть приклад використання.
11. Що називається урновою схемою?
12. Які існують види вибірок урнової схеми і чим вони відрізняються?
13. Чому дорівнює кількість вибірок в урновій схемі без повернення?
14. Чому дорівнює кількість вибірок в урновій схемі з поверненням?

Задача № 1.1

Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5,

а) якщо цифри не повторюються;

б) якщо цифри можуть повторюватись;

в) якщо число непарне.

Задача № 1.2

Скільки існує п’ятизначних чисел, які діляться на 5 без залишку?

Задача № 1.3

Підрахувати кількість вибірок урнової схеми та описати їх склад, якщо $N = 3$, $M = 2$.

Задача № 1.4

Абонент забув дві останні цифри телефонного номеру і набирає його навмання. Знайти кількість можливих варіантів набраного номеру, якщо: а) дві останні цифри – будь-які; б) дві останні цифри – різні.

Задача № 1.5

Знайти кількість способів закреслити 5 номерів в лотереї «5 з 36».

Задача № 1.6

В ящику містяться картки, на кожній з яких надрукована одна з наступних літер: «А», «А», «А», «Е», «И», «К», «М», «М», «Т», «Т». По черзі з ящика навмання виймаються і викладаються зліва направо всі картки. Знайти кількість способів утворення слова «МАТЕМАТИКА».

Задача № 1.7

На зупинці стоять 9 студентів. Під'їхав трамвай з 3-х вагонів. Скількома способами можна розділити студентів по трьох вагонах, якщо кожен вагон може вмістити всіх студентів?

Задача № 1.8

Кодовий замок складається з 6-и дисків з цифрами 0..9 на кожному. Скільки замків з різними кодами можна виготовити?

Задача № 1.9

З урни з 5 білими і 3 чорними кульками виймаються 4 кульки. Скількома способами можна вийняти 2 білі та 2 чорні кульки?

Задача № 1.10

Скількома способами можна відібрати 20 місць в аудиторії з 30-и місцями?

Задача № 1.11

Скількома способами можна вийняти 5 карт з колоди в 36 карт так, щоб серед них виявились карти всіх чотирьох мастей?

Задача № 1.12

В навчальній групі 16 студентів, з яких 6 мають відмінну успішність. Скількома способами з них можна сформувати 2 підгрупи (по 8 чоловік у кожній) так, щоб у кожній з них було по 3 відмінника?

Задача № 1.13

Група студентів вивчає 10 різних дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад занять на понеділок, якщо в цей день повинно бути 4 різних заняття?

Задача № 1.14

З 10 хлопчиків і 10 дівчаток спортивного класу для участі в естафеті необхідно сформувати 3 команди, кожна з яких складається з хлопчика і дівчинки. Скількома способами це можна здійснити?

Задача № 1.15

В електричці 12 вагонів. Скільки існує способів розташування 4 пасажирів, якщо в одному вагоні повинно бути не більше одного пасажира?

Задача № 1.16

Серед 4-х першокурсників, 5-ти другокурсників і 6-ти третьокурсників необхідно обрати 3-х студентів на конференцію. Скількома способами можна здійснити цей вибір, якщо серед обраних повинні бути студенти різних курсів?

Задача № 1.17

Скількома способами можна поставити на полицю 7 різних книг, серед яких є тритомник, щоб книги тритомника стояли поруч?

Задача № 1.18

Гральний кубик кидається тричі. Скільки існує варіантів випадіння очок в даному досліді?

Задача № 1.19

Скількома способами можна розподілити 4 однакові книги на трьох полицях книжкової шафи?

Задача № 1.20

Скільки різних «слів» можна отримати, переставляючи літери в словах

а) «гора», б) «студент», в) «ананас»?

Задача № 1.21

Скільки існує способів розташування 9 чоловік в двомісний, тримісний і чотиримісний номери готелю?

Задача № 1.22

У першості країни по футболу беруть участь 16 команд. Команди, які займають перше, друге й третє місця, нагороджуються відповідно золотою, срібною й бронзовою медалями, а команди, які виявляються на двох останніх місцях, переходять в нижчу лігу. Скільки різних результатів першості може бути?

Задача № 1.23

Скількома способами можна розподілити 16 видів товарів по трьох магазинах, якщо в 1-й магазин необхідно доставити 6, в 2-й магазин – 4, в 3-й магазин – 3 види товарів?

ТЕМА 2. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ

Контрольні питання

1. Як визначається простір елементарних подій?
2. Назвіть види просторів елементарних подій. Чим вони відрізняються?
3. Дайте означення випадкової події.
4. Як визначаються достовірна і неможлива подія?
5. Як визначаються зв'язані і рівносильні події?
6. Як визначаються об'єднання і перетин подій?
7. Які події називаються несумісними?
8. Як визначається різниця подій?
9. Як визначається протилежна подія?
10. Що називається повною групою подій?
11. Дайте означення алгебри подій.
12. Опишіть тривіальну алгебру. Опишіть алгебру, породжену подією.
13. Що називається вимірним простором? Розпишіть його елементи.

Задача № 2.1

В коробці знаходяться резистори, номінальний опір яких дорівнює 1 кОм, а відхилення складає 10%. Навмання виймають 2 резистори та виміряють їх опори. Описати простір елементарних подій (ПЕП).

Задача № 2.2

Урна містить 5 білих та 3 чорні кульки. З урни без повернення виймають кульки до появи першої білої кульки. Описати ПЕП.

Задача № 2.3

Проводиться підкидання монети. Якщо випаде герб, експеримент закінчується, якщо решка – один раз кидають гральний кубик. Описати ПЕП.

Задача № 2.4

На зв'язці 5 ключів, один з яких підходить до замка. Хтось намагається відкрити замок перебором ключів (без повернення). Описати ПЕП.

<u>Основні властивості операцій над подіями</u>

1. $(A\bigcup B)\bigcup C = A\bigcup (B\bigcup C) = A\bigcup B\bigcup C$.

2. $A\bigcup B = B\bigcup A$, $A\bigcup A = A$, $A\bigcup \Omega = \Omega$, $A\bigcup \varnothing = A$.

3. $(AB)C = A(BC) = ABC$.

4. $AB = BA$, $AA = A$, $A\Omega = A$, $A\varnothing = \varnothing$.

5. $A(B\bigcup C) = AB\bigcup AC$.

6. $A\bigcup BC = (A\bigcup B)(A\bigcup C)$.

7. $\overline{A\bigcup B} = \overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A}\bigcup \overline{B}$ – теореми де Моргана

$A\bigcup \overline{A} = \Omega$, $A\overline{A} = \varnothing$, $\overline{\Omega} = \varnothing$, $\overline{\varnothing} = \Omega$, $\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$ – формули інверсії.

8. $A - B = A - AB = A\overline{B}$, $A - \Omega = \varnothing$, $A - \varnothing = A$

9. $\boxed{A\subset B}$ $A\bigcup B = B$, $AB = A$, $A - B = \varnothing$, $\overline{B}\subset \overline{A}$, $B = A\bigcup \overline{A}B = A\bigcup (B - A)$

10. Якщо $A = B$, то $B = A$ і $\overline{A} = \overline{B}$.

11. Якщо $A\subset B$ і $B\subset A$, то $A = B$.

Задача № 2.5

Серед 10-и деталей є 4 браковані. Монтажник навмання виймає деталі до появи першої придатної, після чого експеримент закінчується.

а) Описати ПЕП.

б) Описати наступні події через елементарні події: A={вийняли не більше трьох деталей}; B={серед вийнятих не менше двох бракованих}.

в) Чому дорівнюють події: $C = \overline{B}$, $D = B - A$?

Задача № 2.6

Підкидається один гральний кубик. Описати події через елементарні: A={випала парна кількість очок}; B={випала кількість очок, менша трьох}; C={випало просте число}.

Знайти чому дорівнюють події: ABC, $A\bigcup C$, $A-B$, $\overline{A\bigcup B}$, $\overline{B}C$, $\left(A\bigcup B\right)-C$, $\overline{A\bigcup B}-C$.

Задача № 2.7

Здійснюється підкидання двох гральних кубиків. Описати події через елементарні:

A={сума очок, що випали більша за 9}; B={випала рівно одна «6»};

C={сума очок ділиться на 4 без залишку}.

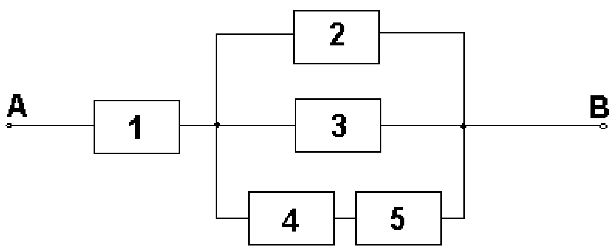
Знайти події: AB, $A-B$, ABC, $AB(A-B)$, $AB\bigcup(A-B)$.

Задача № 2.8

Нехай A, B, C – випадкові події. Описати подію D, яка полягає в тому, що відбулися: а) усі 3 події; б) тільки A;

в) тільки одна з подій; г) хоча б одна з подій.

Задача № 2.9



Є електричне коло.

Елементи $k=\overline{1,5}$ являють собою ключі.

Подія C_k={k-й ключ замкнений}.

Виразіть подію D={струм може протікати з точки A в точку B} через події C_k. Виразіть подію $\overline{D}$ через події C_k.

Задача № 2.10

A, B, C – випадкові події. Спростити вирази:

$$A_1 = (A \cup B)\left(A \cup \overline{B}\right)C, \quad A_2 = AB \cup \overline{A}B \cup \overline{A}\,\overline{B}, \qquad A_3 = AC \cup A\overline{C} \cup BC \cup \overline{A}BC.$$

Задача № 2.11

Квадрат вписано в коло. Подія A={попадання в коло}; B={попадання в квадрат}. Що означають події:

$$C_1 = AB,\ C_2 = A \cup B,\ C_3 = A - B\,?$$

ТЕМА 3. КЛАСИЧНА ІМОВІРНІСТЬ

Контрольні питання

1. Дайте означення імовірності події.
2. Сформулюйте аксіоми А.М. Колмогорова.
3. У чому зміст несуперечності й неповноти аксіом А.М. Колмогорова?
4. Що називається імовірнісним простором? Розпишіть його елементи.
5. Перелічіть основні властивості імовірності.
6. Чи є неможливою подія, імовірність якої дорівнює нулю? Обґрунтуйте відповідь.
7. Як визначається імовірність події для скінченного простору елементарних подій?
8. Що називається індикатором події? Яке його застосування?
9. Як визначається класична імовірність? Яка умова використання формули?
10. Як визначається імовірність події для зліченного простору елементарних подій?
11. Як визначається імовірність події для незліченного простору елементарних подій?
12. Як визначається геометрична імовірність? Яка умова використання формули?

Задача № 3.1

В коробці є 20 транзисторів, серед яких 5 несправних. Навмання виймають 1 транзистор. Знайти імовірності:

а) вилучення несправного транзистора;

б) після виймання несправного транзистора наступним буде вийнято справний.

Задача № 3.2

Здійснюється підкидання 2-х гральних кубиків. Знайти імовірність того, що сума очок, які випали на верхніх гранях, не менша за 9.

Задача № 3.3

В ящику 100 деталей, з них 10 бракованих. Навмання виймають 3 деталі. Знайти імовірності подій:

а) A={серед вийнятих деталей немає бракованих};

б) B={серед вийнятих деталей немає справних};

в) C={вийнято 1 браковану деталь, інші – справні}.

Задача № 3.4

В урні знаходяться 3 білі, 3 сині та 4 чорні кульки. Навмання виймають 6 кульок. Знайти імовірність того, що вилучено:

а) рівно 2 чорні кульки;

б) хоча б 2 білі кульки;

в) по 2 білі, сині і чорні кульки.

Задача № 3.5

З карток складене слово «УЛЬТРАЗВУК». Картки перемішали і склали в коробку. Знайти імовірність того, що при послідовному викладанні 4-х карток зліва направо з'явиться слово «ЗВУК».

Задача № 3.6

З колоди в 36 гральних карт навмання виймають 6 карт. Знайти імовірність того, що серед вийнятих карт:

а) є бубновий туз;

б) усі карти чорної масті.

Задача № 3.7

На картках написані числа 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13. Навмання беруть 2 картки. Знайти імовірність того, що складений з цих чисел дріб буде скоротним.

Задача № 3.8

На полиці навмання розставлено 10 книжок, серед яких є чотиритомник. Знайти імовірність того, що:

а) книги чотиритомника розташовані поруч;

б) книги чотиритомника розташовані в порядку зростання томів.

Задача № 3.9

В коробці є картки з літерами А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. З коробки одну за одною виймають 4 карточки і викладають їх зліва направо. Знайти імовірність того, що отримаємо або слово «ТЕМА» або слово «ТАКТ».

ТЕМА 4. УМОВНА ІМОВІРНІСТЬ

Контрольні питання

1. Дайте означення і наведіть формулу умовної імовірності.
2. Які існують співвідношення між безумовною та умовною імовірностями?
3. Як введення умовної імовірності впливає на імовірнісний простір?
4. Наведіть основні властивості умовної імовірності.
5. Наведіть формулу множення імовірностей для двох подій.
6. Наведіть формулу множення імовірностей для довільної кількості подій.
7. Дайте означення незалежних подій.
8. Наведіть умови незалежності двох подій.
9. Чи є несумісні події незалежними? Відповідь обґрунтуйте.
10. Дайте означення незалежних в сукупності подій.
11. Наведіть формулу повної імовірності.
12. Наведіть формулу Байєса.

Задача № 4.1

Підкидаються 2 гральних кубика. Знайти імовірність того, що випала комбінація «55», якщо відомо, що сума очок, які випали, ділиться на 5 без залишку.

Задача № 4.2

Один раз кидають гральний кубик. Позначимо події: A={кількість очок не більше трьох}; B_1={кількість очок, кратна трьом}; B_2={парна кількість очок}. Знайти імовірності $P(A|B_1)$, $P(A|B_2)$. Чи є події A та B_k, $k=1,2$ незалежними?

Задача № 4.3

Стрілець, маючи в запасі п’ять патронів здійснює постріли в мішень до першого влучення. Імовірність влучити при кожному пострілі 0,7.

Знайти імовірність того, що стрілець влучить в мішень, використавши не більше трьох патронів.

Задача № 4.4

З колоди в 36 гральних карт виймають 1 карту. Знайти імовірність того, що вийняли туз, якщо відомо, що вийнята карта чорної масті.

Задача № 4.5

Партія деталей містить 20% деталей, виготовлених першим заводом, 30% – другим і 50% – третім. Імовірність браку для деталей першого заводу дорівнює 0,05, для другого – 0,01, для третього – 0,06. Чому дорівнює імовірність того, що навмання взята деталь буде бракованою?

Задача № 4.6

Урна містить 5 білих і 3 чорні кульки. Навмання виймають одну кульку і відкладають в бік. Знайти імовірність того, що наступна кулька, яку виймуть, буде білою.

Задача № 4.7

Умова попередньої задачі. Друга вийнята кулька – біла. Знайти імовірність того, що і перша вийнята кулька також була білою.

Задача № 4.8

На залік виносяться 25 питань. Якщо студенту випаде білет з 1-го по 15-й, то імовірність отримати залік – 0,9, з 16-го по 25-й – 0,6. Студент отримав залік. Яка імовірність того, що йому випав білет з 1-го по 15-й?

Задача № 4.9

Знайти імовірність того, що взятий навмання виріб є першосортним, якщо відомо, що 4% всієї продукції є бракованою, а 75% справних виробів задовольняють вимогам першого сорту.

Задача № 4.10

В піраміді 10 гвинтівок, з яких 4 з оптичним прицілом. Імовірність влучити в мішень з гвинтівки з оптичним прицілом дорівнює 0,95, а зі звичайної гвинтівки – 0,8. Стрілець навмання обирає гвинтівку і робить один постріл.

а) Знайти імовірність того, що ціль буде вражена;

б) За умови, що ціль вражена, знайти імовірність того, що стріляли з гвинтівки з оптичним прицілом.

Задача № 4.11

Є 5 урн з різнокольоровими кульками. Одна урна містить 2 білі і 3 чорні кульки, дві урни містять по 5 білих і 5 чорних кульок, дві урни містять по 8 білих і 2 чорні кульки.

Навмання обирають урну, з якої виймають одну кульку. Знайти імовірність того, що кулька білого кольору.

Задача № 4.12

На конвеєр надходять деталі з двох верстатів. Продуктивність першого верстата в 2 рази більше продуктивності другого. Імовірність браку деталі на першому верстаті 0,01, на другому верстаті – 0,02. Знайти імовірність того, що навмання взята з конвеєра деталь – придатна.

Задача № 4.13

У першій урні знаходяться 3 білі і 7 чорних кульок, у другій урні – 5 білих і 3 чорні кульки. З першої урни в другу перекладають 2 кульки, а потім з другої урни виймають одну кульку. Яка ймовірність того, що вона біла?

Задача № 4.14

На вхід радіолокаційного пристрою з імовірністю 0,8 надходить суміш сигналу з завадою, а з імовірністю 0,2 – тільки завада. Якщо потрапляє корисний сигнал з завадою, то пристрій реєструє наявність сигналу з імовірністю 0,7, якщо тільки завада, то з імовірністю 0,3. Відомо, що пристрій зареєстрував наявність сигналу. Знайти імовірність того, що в його складі є корисний сигнал.

Задача № 4.15

В урні лежить кулька невідомого кольору: з однаковими імовірностями – біла або чорна. В урну опускається біла кулька і після ретельного перемішування одна кулька виймається. Вона виявилась білою. Яка імовірність того, що в урні залишилась біла кулька?

ТЕМА 5. НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ

Контрольні питання

1. Дайте означення незалежних випробувань.
2. Дайте означення схеми Бернуллі.
3. Наведіть приклади випробувань, що можуть бути описані схемою Бернуллі.
4. Як описується елементарна подія в схемі Бернуллі?
5. Чому дорівнює імовірність елементарної події в схемі Бернуллі?
6. Яка основна задача розв'язується в схемі Бернуллі?
7. Запишіть формулу Бернуллі.
8. Що називається найбільш імовірною кількістю успіхів у схемі Бернуллі?
9. Як знайти найбільш імовірну кількість успіхів в схемі Бернуллі?
10. Скільки значень може приймати найбільш імовірна кількість успіхів в схемі Бернуллі? Відповідь обґрунтуйте.
11. Чому дорівнює імовірність того, що успіх у схемі Бернуллі здійсниться хоча б один раз? Відповідь обґрунтуйте.
12. Як знайти мінімальну кількість експериментів у схемі Бернуллі, при якій успіх відбудеться хоча б один раз з імовірністю, не менше заданої?
13. Дайте означення поліноміальної схеми.
14. Наведіть приклади випробувань, що можуть бути описані поліноміальною схемою.
15. Як описується елементарна подія в поліноміальній схемі?
16. Чому дорівнює імовірність елементарної події в поліноміальній схемі?
17. Яка основна задача розв'язується в поліноміальній схемі?
18. Запишіть поліноміальну формулу.

Задача № 5.1

Імовірності правильної роботи кожного з трьох приладів дорівнюють відповідно 0,9, 0,8, 0,7. Знайти імовірності того, що:

а) всі прилади працюють правильно;

б) хоча б один прилад працює неправильно.

Задача № 5.2

Тричі підкидається гральний кубик. Знайти імовірність того, що 2 рази випаде: а) «6»; б) число, кратне 3.

Задача № 5.3

На заліку зі стрільби стрілець здійснює 5 пострілів в мішень з імовірністю влучення 0,8 при одному пострілі. Знайти імовірність успішного складання заліку, якщо для цього потрібно не менше трьох влучень.

Задача № 5.4

Здійснюється підкидання одного грального кубика. Скільки необхідно здійснити підкидань, щоб з імовірністю не менш як 0,7 «1» випала хоча б 1 раз?

Задача № 5.5

При обертанні антени локатора за час опромінення літака встигають відбитися 8 імпульсів. Знайти імовірність виявлення цілі за один оберт антени, якщо для цього необхідно проходження через приймач не менше 5-и імпульсів, а імовірність заглушення імпульсу завадою дорівнює 0,1

Задача № 5.6

При роздачі колоди з 52 гральних карт порівну чотирьом гравцям один з них тричі поспіль не отримував туза. Яка імовірність такої події?

Задача № 5.7

Проведено 20 незалежних випробувань, кожне з яких полягає в підкиданні трьох монет. Знайти імовірність того, що хоча б в одному випробуванні з'являться три герби. Чому дорівнює найбільш імовірне число випадіння трьох решок?

Задача № 5.8

Експериментально встановлено, що при підкиданні сірникової коробки кількості її випадінь на меншу, середню і велику грані відносяться як 1:4:15. Яка імовірність того, що при 6-ти підкиданнях коробки вона 1 раз випаде на меншу грань, 1 раз – на середню і 4 рази – на велику?

Задача № 5.9

Відбувається 4 постріли по мішені. Імовірність влучити в «10» – 0,2, в «5» – 0,3, в «3» – 0,5. Знайти імовірність набрати 23 очка.

Задача № 5.10

Резистори, номінальні опори яких дорівнюють 100 Ом, сортують на резистори підвищеної точності (-5% ...+5%) і звичайної точності. Яка імовірність того, що вісім резисторів з десяти перевірених будуть підвищеної точності, якщо в результаті вимірювань рівноможливо отримати будь-який опір від 90 до 110 Ом?

ТЕМА 6. ІМОВІРНІСТЬ

Задача № 6.1

Є 3 урни: у першій – 3 білі і 3 чорні кульки, у другій – 5 білих і 5 чорних кульок, в третій – 2 білі і 2 чорні кульки. З кожної урни виймають по одній кульці. Знайти імовірність того, що серед вийнятих кульок рівно 2 білі.

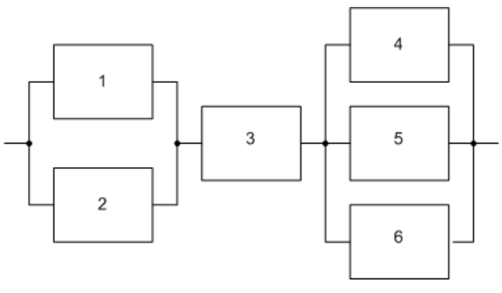
Задача № 6.2

У попередній задачі змінюється склад кульок – перша урна: 2 білі і 3 чорні, друга урна: 5 білих і 7 чорних, третя урна: 3 білі і 4 чорні. З кожної урни виймають по одній кулі. Знайти імовірність того, що серед вийнятих кульок рівно 2 білі.

Задача № 6.3

В урні 10 білих і 10 чорних кульок. Навмання з поверненням виймають 7 кульок. Знайти імовірність того, що з семи разів біла кулька з'явиться чотири рази.

Задача № 6.4



Система передачі інформації складається з шести блоків.

Імовірність надійної роботи кожного з блоків дорівнює: 1 – 0,9; 2 – 0,8; 3– 0,95; 4 – 0,9; 5 – 0,9; 6 – 0,5.

Обчислити імовірність надійної роботи системи в цілому.

Задача № 6.5

Два стрільця здійснюють по одному пострілу в мішень. Імовірність влучення першим стрільцем – 0,6, другим – 0,5. Знайти імовірність того, що влучив хоча б один стрілець.

Задача № 6.6

Відомо, що A і B – події, які спостерігаються в експерименті, причому $P(B)=0,4$, $P(A|B)=0,3$, $P(A|\overline{B})=0,2$.

Знайти $P(A)$, $P(\overline{A}\,\overline{B})$, $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

Задача № 6.7

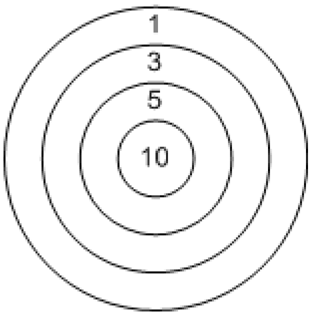
Виріб проходить випробування на трьох незалежних підприємствах, кожне з яких може з імовірністю 0,8 надати на виріб сертифікат якості. Якщо виріб отримає хоча б 2 сертифікати, то його відносять до першого класу, інакше – до другого класу. Імовірність несправності виробу 1-го класу через місяць експлуатації – 0,1, другого класу – 0,3.

Знайти імовірність того, що несправний виріб відноситься до другого класу.

Задача № 6.8

Знайти імовірність того, що серед п’яти вийнятих гральних карт з колоди в 36 гральних карта будуть присутні карти всіх мастей.

Задача № 6.9



Мішень являє собою 4 концентричні кола з радіусами kr, $k=\overline{1,4}$. Здійснюються 2 постріли по мішені, причому гарантовано влучення в мішень. Вважаючи рівноможливими влучення в будь-яку точку мішені знайти імовірність набрати не менше 15 очок.

ТЕМА 7. ВИПАДКОВА ВЕЛИЧИНА

Контрольні питання

1. Дайте означення випадкової величини.
2. Дайте означення закону розподілу випадкової величини.
3. Дайте означення функції розподілу випадкової величини.
4. Перелічіть основні властивості функції розподілу випадкової величини.
5. Дайте означення дискретних випадкових величин. Як задається їх розподіл?
6. Що називається рядом розподілу? Яка його основна властивість?
7. Дайте означення неперервних випадкових величин. Як задається їх розподіл?
8. Що називається щільністю імовірності випадкової величини? Які у неї одиниці вимірювання?
9. Перелічіть основні властивості щільності імовірності випадкової величини.
10. Дайте означення змішаних випадкових величин. Як задається їх розподіл?
11. Наведіть приблизні графіки функцій розподілу для різних видів випадкових величин.

Задача № 7.1

Дискретна випадкова величина ξ задана рядом розподілу:

x_k	0	1	2	3
p_k	0,1	0,3	0,4	p_4

Знайти імовірність p_4. Побудувати графік функції розподілу та записати її аналітичний вираз.

Задача № 7.2

Задана функція розподілу випадкової величини ξ.

$$F(x)=\begin{cases} 0\ , & x\le -1; \\ 0,2, & x\in(-1;1]; \\ 0,7, & x\in(1;3]; \\ 1\ , & x>3. \end{cases}$$

Побудувати графік функції розподілу та знайти ряд розподілу. Побудувати багатокутник розподілу.

Задача № 7.3

Умова попередньої задачі. Знайти імовірності наступних подій:
$A=\{\xi<0\}$; $B=\{1\le\xi<3\}$; $C=\{0,5\le\xi\}$; $D=\{\xi>1\}$; $E=\{1<\xi\le 3\}$.

Задача № 7.4

Три рази підкидають симетричну монету. Знайти ряд розподілу та функцію розподілу кількості решок, що випали.

Задача № 7.5

Визначити, при яких значеннях k функція $p(x)=\begin{cases} kx^3, x\in(0;1], \\ 0, \quad x\notin(0;1]. \end{cases}$ є щільністю імовірності деякої випадкової величини. Знайти функцію розподілу і побудувати графіки $p(x)$ та $F(x)$.

Задача № 7.6

Визначити, при яких значеннях α і β функція $F(x)=\alpha+\beta arctgx$ є функцією розподілу деякої випадкової величини

Задача № 7.7

Задана функція $F(x)$ у вигляді:

$$F(x)=\begin{cases}0\ , & x\le 0;\\ kx\ , & x\in(0;2];\\ 1\ , & x>2.\end{cases}$$

Визначити, при яких значеннях k функція $F(x)$ є функцією розподілу деякої випадкової величини.

Задача № 7.8

Випадкова величина ξ задана щільністю імовірності вигляду:

$$p(x)=\begin{cases}0,5x, & x\in(0;2];\\ 0, & x\notin(0;2].\end{cases}$$

Знайти аналітичний вираз функції розподілу даної випадкової величини і побудувати її графік.

Задача № 7.9

Пристрій складається з трьох працюючих блоків, кожний з яких може відмовити незалежно від інших з імовірностями 0,1; 0,2; 0,3. Знайти закон розподілу числа працюючих блоків.

Задача № 7.10

Задана функція розподілу випадкової величини ξ має вигляд

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,5;\\ 2x-3, & x\in(1,5;2];\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Знайти імовірність того, що в трьох незалежних випробуваннях випадкова величина 2 рази прийме значення з інтервалу $[1,7;1,9]$.

Задача № 7.11

Задано ряд розподілу:

x_k	1	2	3
p_k	$1{,}5a$	$0{,}3$	$2a$

.

Знайти константу a. Побудувати функцію розподілу.

ТЕМА 8. ВИПАДКОВИЙ ВЕКТОР

Контрольні питання

1. Дайте означення випадкового вектора.
2. Дайте означення функції розподілу випадкового вектора.
3. Перелічіть основні властивості функції розподілу випадкового вектора.
4. Дайте означення частинного розподілу.
5. Як отримати частинний розподіл за допомогою функції розподілу випадкового вектора?
6. Дайте означення дискретного вектора.
7. Що називається матрицею розподілу? Які у неї властивості?
8. Дайте означення неперервного вектора.
9. Дайте означення щільності імовірності випадкового вектора. Які у неї одиниці вимірювання?
10. Перелічіть основні властивості щільності імовірності випадкового вектора.
11. Дайте означення умовного закону розподілу. Чому дорівнює умовна функція розподілу?
12. Як визначається умовний розподіл для дискретних і неперервних випадкових величин?
13. Дайте загальне означення незалежних випадкових величин.
14. Сформулюйте умову незалежності для дискретних і неперервних випадкових величин.

Дискретний випадковий вектор

Задача № 8.1

Знайти спільний закон розподілу кількості гербів та решок, які з'являються при однократному підкиданні двох симетричних монет.

Задача № 8.2

Задано закон розподілу випадкового вектора:

y_j \ x_i	-1	0	2
-1	0	0,1	0,2
1	0,4		0

Знайти частинні функції розподілу $F_\xi(x)$ та $F_\eta(y)$; умовний закон розподілу $\xi|\eta=1$. Знайти імовірності: $P\{\xi=0;\eta\geq -1\}$, $P\{\xi>-1;\eta<1\}$.

Задача № 8.3

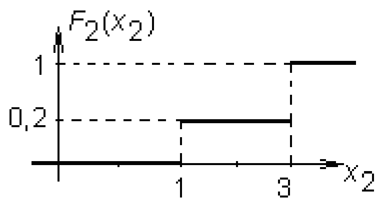
Задано закон розподілу випадкового вектора. Зайти закон розподілу $\xi_1|\xi_2=-3$. Чи є випадкові величини ξ_1 та ξ_2 незалежними?

x_{1i} \ x_{2j}	-3	0
2	0,05	0,1
3		0,1
5	0,3	0,15

Задача № 8.4

Задані закони розподілу незалежних випадкових величин ξ_1 та ξ_2. Знайти спільний закон розподілу.

x_1	2	4
p_1	0,3	

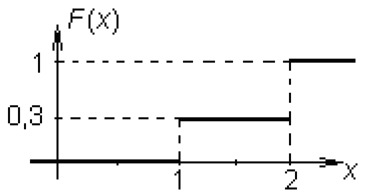


Задача № 8.5

Два стрільця, для яких імовірності влучити в мішень при одному пострілі дорівнюють відповідно 0,6 та 0,8, здійснили по 2 постріли по мішені. Знайти спільний закон розподілу кількості влучень двох стрільців в мішень.

Задача № 8.6

Задано безумовний закон розподілу випадкової величини ξ_2 та умовні закони розподілу $\xi_1|\xi_2$. Знайти спільний закон розподілу вектору (ξ_1,ξ_2).



$x_{1i}\|\xi_2 = 1$	2	3
p_{1i}	0,1	0,9

$x_{1i}\|\xi_2 = 2$	2	3
p_{1i}	0,7	0,3

Задача № 8.7

З ящика, в якому знаходяться 5 деталей, включаючи 2 браковані, виймають 4 деталі. Знайти спільний закон розподілу кількості придатних та бракованих деталей серед вийнятих.

Неперервний випадковий вектор

Задача № 8.8

Задана функція розподілу випадкового вектора $(\xi_1;\xi_2)$ у вигляді:

$$F(x_1,x_2)=\begin{cases} 0, & x_1 \le 0 \text{ àáî } x_2 \le 0; \\ Ax_1x_2, & x_1 \in (0;1],\ x_2 \in (0;2]; \\ Bx_1, & x_1 \in (0;1], x_2 > 2; \\ Cx_2, & x_1 > 1, x_2 \in (0;2]; \\ 1, & x_1 > 1,\ x_2 > 2. \end{cases}$$

Знайти A,B,C. Чи є випадкові величини ξ_1 та ξ_2 незалежними?

Задача № 8.9

Умова попередньої задачі. Знайти щільність імовірності випадкового вектору і щільність імовірності окремих складових вектора.

Задача № 8.10

Задано щільність імовірності випадкового вектору $(\xi_1;\xi_2)$

$$p(x_1,x_2)=\begin{cases} Ax_1,\ x_1\in(0;2], & x_2\in(0;2];\\ 0,\ \ x_1\notin(0;2] \ \text{àáî} & x_2\notin(0;2]. \end{cases}$$

Знайти константу A, функцію розподілу випадкового вектора. Чи є випадкові величини ξ_1 та ξ_2 незалежними? Знайти імовірність $P\{1\le\xi_1<2;1\le\xi_2<2\}$.

Задача № 8.11

Дві неперервні випадкові величини ξ_1 и ξ_2 задані відповідно щільністю імовірності і функцією розподілу у вигляді

$$p_1(x_1)=\begin{cases} 0, & x_1\notin(0;2];\\ \dfrac{x_1}{2}, & x_1\in(0;2]. \end{cases} \qquad F_2(x_2)=\begin{cases} 0, & x_2\le 0;\\ 1-e^{-2x_2}, & x_2>0. \end{cases}$$

Знайти спільну функцію розподілу $F(x_1,x_2)$ та спільну щільність імовірності $p(x_1,x_2)$ цих випадкових величин за умови їх незалежності.

ТЕМА 9. ФУНКЦІОНАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Контрольні питання

1. Сформулюйте постановку задачі перетворення випадкової величини.
2. Як розв'язується задача функціонального перетворення для дискретних величин?
3. Наведіть загальний підхід до розв'язку задачі перетворення випадкової величини.
4. Які проблеми існують при розв'язку задачі перетворення випадкових величин?
5. Запишіть формулу для функції розподілу випадкової величини, отриманої неперервним монотонним перетворенням.
6. Запишіть формулу для функції розподілу випадкової величини, отриманої лінійним перетворенням.
7. Запишіть формулу для щільності імовірності випадкової величини, отриманої неперервним монотонним перетворенням.
8. Запишіть формулу для щільності імовірності випадкової величини, отриманої лінійним перетворенням.
9. Запишіть формулу для щільності імовірності випадкової величини у випадку немонотонного перетворення.
10. Запишіть формулу для функції розподілу випадкової величини, отриманої перетворенням, що має ділянку постійності.
11. Запишіть формулу для функції розподілу випадкової величини, отриманої перетворенням, що має розрив першого роду.
12. Сформулюйте постановку задачі перетворення випадкового вектора.
13. Як розв'язується задача функціонального перетворення для дискретного вектора?
14. Як розв'язується задача функціонального перетворення для непере-

рвного вектора?

15. Як отримати щільність імовірності для арифметичних операцій над неперервними величинами?

16. Чому дорівнює щільність імовірності суми неперервних випадкових величин?

Задача № 9.1

Задано ряд розподілу дискретної випадкової величини ξ.

x_k	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
p_k	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,1$

Знайти ряд розподілу випадкової величини $\eta = \sin\xi$.

Задача № 9.2

Незалежні випадкові величини ξ_1 і ξ_2 мають однакові розподіли:

x_k	1	2
p_k	0,2	0,8

Знайти розподіл випадкової величини $\eta = \xi_1 - \xi_2$.

Задача № 9.3

Випадкова величина ξ має функцію $F_\xi(x)$.

Знайти і побудувати функцію розподілу випадкової величини $\eta = -2\xi$.

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0,3, & x \in (1;2], \\ 0,8, & x \in (2;3], \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Задача № 9.4

Неперервна випадкова величина ξ має функцію розподілу

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x/2, & x \in (0;2], \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу випадкової величин: 1) $\eta = 3e^{2\xi}$;   2) $\eta = -\xi$.

Задача № 9.5

Неперервна випадкова величина ξ задана щільністю імовірності

$$p(x) = \begin{cases} 1/4, x \in (-1;3], \\ 0, \quad x \notin (-1;3]. \end{cases}$$

Знайти щільність імовірності випадкової величини $\eta = \xi^3$.

Задача № 9.6

Неперервна випадкова величина ξ задана щільністю імовірності

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x+1), x \in (-1;1]; \\ 0, \qquad x \notin (-1;1]. \end{cases}.$$

Знайти щільність імовірності випадкової величини $\eta = |\xi|$.

Задача № 9.7

Величина ємності C коливального LC- контуру рівномірно розподілена на інтервалі [2 мкФ; 4 мкФ]. Знайти щільність імовірності резонансної частоти ω_0.

Задача № 9.8

Неперервна випадкова величина ξ задана функцією розподілу

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2; \\ 0,25(x+2), & x \in (-2;2]; \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta = \begin{cases} 0, & \xi \in (-1;1]; \\ |\xi| - 1, & \xi \notin (-1;1]. \end{cases}$

Задача № 9.9

Неперервна випадкова величина ξ має функцію розподілу

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1, \\ \dfrac{(x+1)}{3}, & x\in(-1;2], \\ 1, & x>2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу випадкової величини $\eta=\begin{cases} 2\xi-1, \xi\le 0, \\ 2\xi+1, \xi>0. \end{cases}$

Задача № 9.10

Задано закон розподілу випадкового вектору (ξ_1,ξ_2). Знайти закон розподілу випадкового вектору (η_1,η_2), де

x_{1i} \ x_{2j}	0	1
-1	0,1	0,2
1	0,3	0,4

$\eta_1=\xi_1+\xi_2$, $\eta_2=\xi_1\xi_2$. Знайти закони розподілу величин η_1 і η_2.

Задача № 9.11

Задано неперервний випадковий вектор (ξ_1,ξ_2) з щільністю імовірності $p_{\xi}(x_1,x_2)$. Знайти щільність імовірності випадкового вектору (η_1,η_2), де $\eta_1=\xi_1+\xi_2$, $\eta_2=\xi_1-\xi_2$.

Задача № 9.12

Незалежні випадкові величини ξ_1 і ξ_2 мають однаковий закон розподілу $p_{\xi}(x)=e^{-x}E(x)$. Знайти щільність імовірності випадкової величини $\eta=\xi_1+\xi_2$ і побудувати її графік.

ТЕМА 10. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЕЛИЧИН І ВЕКТОРІВ

Контрольні питання

1. Дайте означення математичного сподівання випадкової величини.
2. Запишіть формули для математичного сподівання трьох видів випадкових величин.
3. Перелічіть основні властивості математичного сподівання.
4. Дайте означення дисперсії випадкової величини.
5. Запишіть формули для дисперсії трьох видів випадкових величин.
6. Перелічіть основні властивості дисперсії.
7. Що називається середнім квадратичним відхиленням? Які його одиниці вимірювання?
8. Запишіть дві нерівності Чебишова.
9. Що називається центрованою випадковою величиною? Які у неї числові характеристики?
10. Що називається нормованою випадковою величиною? Які у неї числові характеристики?
11. Що називається стандартною випадковою величиною? Які у неї числові характеристики?
12. Дайте означення початкових та центральних моментів випадкової величини.
13. Як зв’язані між собою початкові та центральні моменти випадкової величини?
14. Чому дорівнює і що характеризує коефіцієнт асиметрії? Наведіть приклади.
15. Чому дорівнює і що характеризує коефіцієнт ексцесу? Наведіть приклади.
16. Дайте означення моди. Які бувають розподіли в залежності від кількості мод?

17. Що називають медіаною та квантилью?

18. Дайте означення початкових та центральних моментів двовимірного випадкового вектора.

19. Дайте означення кореляційного моменту.

20. Перелічіть основні властивості кореляційного моменту.

21. Дайте означення коефіцієнта кореляції.

22. Перелічіть основні властивості коефіцієнта кореляції.

23. Чому дорівнює коефіцієнт кореляції для випадкових величин, що зв'язані лінійно?

24. Що характеризують кореляційний момент та коефіцієнт кореляції?

25. Дайте означення початкових та центральних моментів багатовимірного випадкового вектора.

26. Що являє собою матриця кореляційних моментів? Які у неї властивості?

27. Що являє собою матриця коефіцієнтів кореляції? Які у неї властивості?

Задача № 10.1

Функція розподілу випадкової величини ξ дорівнює

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x/3, & x\in(0;3];\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Знайти математичне сподівання випадкової величини ξ.

Задача № 10.2

Знайти дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини ξ, якщо її функція розподілу має вигляд

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x/3, & x\in(0;2];\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Задача № 10.3

Випадкова величина приймає значення -1, 0, 1 з імовірностями p_1, p_2 та p_3. Відомо, що $M\{\xi\} = -0,2$, $D\{\xi\} = 0,36$. Знайти імовірності, з якими випадкова величина ξ приймає свої значення.

Задача № 10.4

Випадкова величина ξ_1 має математичне сподівання m_1 та дисперсію σ_1^2. Знайти математичне сподівання випадкової величини ξ_2, якщо $\xi_2 = 1 + 2\xi_1 + 3\xi_1^2$.

Задача № 10.5

Знайти математичне сподівання випадкової величини $\eta = e^{\xi}$, якщо випадкова величина ξ:

1) має ряд розподілу

x_i	-1	0	1
p_i	0,2	0,3	0,5

2) має щільність імовірності

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0;2]; \\ 0,5, & x \in (0;2]. \end{cases}$$

Задача № 10.6

Серед п'яти однотипних телевізорів є лише один справний. Щоб на нього натрапити, навмання беруть один із них і після відповідної перевірки відставляють його окремо від решти. Перевірка триває до появи справного телевізора. Визначити математичне сподівання і дисперсію випадкової величини ξ – кількості перевірених телевізорів. Знайти моду.

Задача № 10.7

Маємо три ящики. У першому з них міститься 6 стандартних і 4 браковані деталі, у другому – 8 стандартних і 2 браковані й у третьому – 5 стандартних і 5 бракованих деталей. Із кожного ящика навмання беруть по одній деталі. Обчислити $M\{\xi\}$, σ, Mo для дискретної випадкової величини ξ – появи кількості стандартних деталей серед трьох навмання взятих.

Задача № 10.8

З урни, яка містить 2 білі та 5 чорних кульок, виймають навмання та без повернення 3 кульки. Випадкова величина ξ – кількість білих кульок у вибірці. Знайти моду, математичне сподівання та дисперсію випадкової величини ξ.

Задача № 10.9

Задано закон розподілу випадкового вектору (ξ_1, ξ_2).

Знайти кореляційний момент R_{12}.

$x_{1i} \backslash x_{2j}$	3	4
1	0,1	0,5
2	0,2	0,2

Задача № 10.10

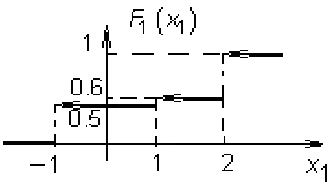
Задано закон розподілу випадкової величини ξ

x_k	–1	0	1
p_k	0.3	0.4	0.3

Знайти кореляційний момент $R_{\xi\eta}$ якщо $\eta = \xi^2$.

Задача № 10.11

Незалежні випадкові величини ξ_1, ξ_2 задані законами розподілу



x_{2i}	−2	0
p_{2i}	0.25	0.75

Знайти кореляційний момент випадкового вектору (η_1, η_2), якщо $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\eta_2 = \xi_1 - \xi_2$.

Задача № 10.12

Випадковий вектор (ξ_1, ξ_2) задано щільністю імовірності

$$p(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, & x_1 \notin (0;1] \text{ àáî } x_2 \notin (-1;2]; \\ 0,25\left(x_1^2 + x_2^2\right), & x_1 \in (0;1], x_2 \in (-1;2]. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання випадкової величини ξ_1.

ТЕМА 11. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Контрольні питання

1. Дайте означення виродженого розподілу і запишіть його характеристики.
2. Дайте означення розподілу Бернуллі.
3. Обчисліть математичне сподівання і дисперсію випадкової величини, що має розподіл Бернуллі.
4. Дайте означення біноміального розподілу.
5. Як пов’язані між собою розподіл Бернуллі та біноміальний розподіл?
6. Обчисліть математичне сподівання і дисперсію випадкової величини, що має біноміальний розподіл.
7. Дайте означення розподілу Пуассона.
8. Дайте означення пуассонівського потоку подій.
9. Запишіть формулу щільності імовірності рівномірного розподілу. Намалюйте її графік.
10. Запишіть формулу функції розподілу рівномірного розподілу. Намалюйте її графік.
11. Обчисліть математичне сподівання рівномірного розподілу.
12. Запишіть формулу щільності імовірності показникового розподілу. Намалюйте її графік.
13. Запишіть формулу функції розподілу показникового розподілу. Намалюйте її графік.
14. Чому дорівнюють математичне сподівання та дисперсія показникового розподілу?
15. Чому дорівнюють імовірності відмови елемента та його безвідмовної роботи?
16. Запишіть формулу щільності імовірності нормального розподілу. Намалюйте її графік.

17. Як визначається функція Лапласа? Намалюйте її графік.

18. Перерахуйте основні властивості функції Лапласа.

19. Запишіть формулу функції розподілу нормального розподілу. Намалюйте її графік.

20. Сформулюйте правило трьох сигма.

Дискретні закони розподілу

Задача № 11.1

Випадкова величина ξ має біноміальний закон розподілу з параметрами $n=5$, $p=\frac{2}{3}$. Отримати закон розподілу цієї випадкової величини, знайти її функцію розподілу, математичне сподівання і дисперсію. Побудувати графік її функції розподілу.

Задача № 11.2

Є три урни наступного складу: 5 білих і 5 чорних кульки; 3 білі і 2 чорні кульки; 6 білих і 4 чорні кульки. З кожної урни виймають по одній кулі. Знайти ряд розподілу і математичне сподівання кількості вийнятих білих кульок.

Задача № 11.3

Абітурієнт при вступі до інституту складає чотири іспити, імовірність успішно скласти кожний дорівнює 0,8. Випадкова величина ξ – кількість іспитів, які успішно склав абітурієнт. Отримати ряд розподілу випадкової величини ξ. Знайти найбільш імовірну кількість іспитів, які успішно складено.

Задача № 11.4

Стрілець за незмінних умов здійснює 3 постріли по мішені. Середнє число промахів при 3-х пострілах дорівнює $0,6$. Знайти закон розподілу і числові характеристики числа влучень в мішень.

Задача № 11.5

Пристрій складається з 4-х незалежно працюючих елементів. Імовірність відмови кожного елемента в одному досліді дорівнює 0,1. Знайти ряд розподілу кількості елементів, що відмовили в одному досліді, ξ. Знайти числові характеристики випадкової величини ξ.

Задача № 11.6

Відбуваються незалежні випробування з однаковою імовірністю появи події A в кожному випробуванні. Знайти імовірність появи події A, якщо дисперсія кількості появ події A в трьох незалежних випробуваннях дорівнює 0,63.

Задача № 11.7

Середня кількість викликів, що надходять на АТС за одну хвилину, дорівнює 2. Знайти імовірність того, що за 4 хв надійде: а) три виклики; б) менше трьох викликів; в) не менше трьох викликів. Потік подій прийняти пуассонівським.

Задача № 11.9

Магазин має два входи, потоки покупців на цих входах незалежні. Через перший вхід заходить в середньому $\lambda_1 = 1$ чол./хв, а через другий вхід – $\lambda_2 = 2$ чол./хв. Визначити імовірність того, що за 2 хвилини хоча б один покупець відвідає магазин.

Задача № 11.10

Знайти середню кількість автомобілів, які заїхали на станцію технічного обслуговування за добу, якщо імовірність того, що за 1 год. не заїде жоден автомобіль, дорівнює 0,1.

Задача № 11.8

Знайти середнє число помилок на сторінці рукопису, якщо імовірність того, що сторінка рукопису містить хоча б одну помилку дорівнює 0,95. Вважається, що число помилок має розподіл Пуассона. Знайти імовірність того, що на двох сторінках буде не більше двох помилок.

Неперервні закони розподілу

Задача № 11.11

Відомо, що передатчик може розпочати роботу в будь-який момент часу між 12-ою і 14-ою годинами дня. Яка імовірність того, що початку передачі доведеться чекати не більше 15-и хвилин?

Задача № 11.12

Миттєві значення напруги на виході генератора шуму рівномірно розподілені в діапазоні -1..+1 В. При перевищенні шумом значення 0,6 В спрацьовує датчик. Знайти імовірність того, що з десяти спостережень датчик спрацює хоча б один раз.

Задача № 11.13

Частота радіо передатчика імпульсною радіостанції розподілена рівномірно в діапазоні 8300 ± 30 МГц . Чому дорівнює імовірність того, що з 5-и сигналів хоча б один сигнал буде виявлений станцією розвідки зі смугою пропускання приймача 8225…8285 МГц?

Задача № 11.14

Неперервна випадкова величина ξ розподілена за показниковим розподілом і задана щільністю імовірності $p(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ 5e^{-5x}, & x > 0. \end{cases}$

Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини ξ. Знайти імовірність того. що в результаті експерименту випадкова величина ξ прийме значення з інтервалу $[0{,}3;\, 1]$.

Задача № 11.15

Амплітуди імпульсів акустичної емісії на виході детектора мають показниковий розподіл з параметром λ=1 В. Для реєстрації імпульсу необхідно перевищення ним порогу в 0,5 В. Знайти найбільш імовірну кількість зареєстрованих імпульсів серед п’яти, що надійшли на вхід детектора, і знайти їх дисперсію.

Задача № 11.16

Інтервали часу між відмовами елемента мають показниковий розподіл $F(t) = 1 - \exp(-0{,}01t)$, $t > 0$ – t в годинах. Знайти імовірність того, що за час тривалістю 50 годин: а) елемент відмовить; б) елемент не відмовить.

Задача № 11.17

Відомо, що середній час безвідмовної роботи лампи розжарювання складає 750 годин. Дві лампи з однієї партії одночасно встановлюють в світильник. Знайти імовірність того, що обидві лампи перегорять, не пропрацювавши 700 годин.

Задача № 11.18

Випадкова величина ξ має нормальний закон розподілу з параметрами $m = 20$, $\sigma = 10$. Знайти імовірність того, що 1) випадкова величина ξ прийме значення, які належать інтервалу $[10; 50]$; 2) відхилення від математичного сподівання за абсолютною величиною буде менше 3-х.

Задача № 11.19

Випадкова величина ξ розподілена нормально з математичним сподіванням 25. Імовірність потрапляння ξ в інтервал (10; 15) дорівнює 0,2.

Знайти імовірність потрапляння ξ в інтервал (35; 40).

Задача № 11.20

Математичне сподівання і дисперсія нормально розподіленої випадкової величини ξ відповідно дорівнюють 10 і 9. Знайти імовірності того, що в результаті трьох випробувань: а) ξ тричі потрапить в інтервал (9; 12); б) ξ двічі потрапить в інтервал (7; 19).

Задача № 11.21

До резистора опором 4 Ом прикладається напруга випадкового характеру, щільність імовірності якої відповідає нормальному розподілу з нульовим математичним сподіванням і середнім квадратичним відхиленням, рівним 10 В. Знайти імовірність того, що миттєва потужність, яка розсіюється на резисторі: а) лежить в діапазоні (10±10%) Вт; б) перевищить 25 Вт; в) не перевищить 10 Вт.

ТЕМА 12. ХАРАКТЕРИСТИЧНА ФУНКЦІЯ. ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ

Контрольні питання

1. Дайте означення характеристичної функції.
2. Запишіть формули для обчислення характеристичної функції дискретних і неперервних випадкових величин.
3. Запишіть основні властивості характеристичної функції.
4. Як по заданій характеристичний функції знайти щільність імовірності та функцію розподілу випадкової величини?
5. Чому дорівнює характеристична функція випадкових величин розподілів: виродженого, Бернуллі, біноміального?
6. Виведіть формулу для характеристичної функцію розподілу Пуассона.
7. Запишіть характеристичні функції для рівномірного і нормального розподілів.
8. Як обчислити початкові моменти з використанням характеристичної функції? Виразіть характеристичну функцію через початкові моменти.
9. Як формулюється проблема моментів?
10. Як визначаються кумулянти випадкової величини? Яка їх властивість?
11. Як перші чотири кумулянти зв’язані з початковими та центральними моментами випадкової величини?
12. Дайте означення кумулянтних коефіцієнтів. Запишіть перші чотири кумулянтні коефіцієнти.
13. Що являють собою збіжність з імовірністю одиниця і збіжність по імовірності?
14. Що являють собою збіжність в середньому квадратичному і збіжність по розподілу?
15. Як зв’язані між собою різні види імовірнісних збіжностей?

16. Що являє собою центральна гранична теорема? Сформулюйте теорему Ляпунова.
17. Сформулюйте інтегральну та локальну теореми Муавра–Лапласа.
18. Сформулюйте теорему Пуассона та закон великих чисел у формі Бернуллі.
19. Дайте означення безмежно подільної випадкової величини.
20. Наведіть приклади безмежно подільних випадкових величин.

Задача № 12.1

Знайти математичне сподівання та дисперсію розподілу Пуассона, використовуючи характеристичну функцію.

Задача № 12.2

Знайти другий початковий момент розподілу, характеристична функція якого описується формулою $f(u) = e^{iu - 8u^2}$.

Задача № 12.3

Випадкова величина η являє собою суму 5 незалежних випадкових величин $\xi_k, k = \overline{1,5}$, розподілених за законом Пуассона з параметром $\lambda = 1$. Знайти коефіцієнт асиметрії випадкової величини η.

Задача № 12.4

Випадкова величина $\eta = \xi_1 + \xi_2$, де $\xi_k, k = \overline{1,2}$, – незалежні, нормально розподілені випадкові величини з параметрами m_1 і m_2, σ_1 і σ_2. Знайти характеристичну функцію випадкової величини η.

Задача № 12.5

Довести, що для нормально розподіленої випадкової величини кумулянти $\kappa_s = 0$ при $k \geq 3$.

Задача № 12.6

Здійснюється 1000 підкидань симетричної монети. Знайти імовірність того, що герб випаде не менше 490 і не більше 510 разів; більше 510 разів.

Задача № 12.7

Лабораторія закупила 1000 мікросхем, кожна з яких з імовірністю 0,01 може бути несправною. Знайти ймовірність того, що серед закуплених мікросхем 10 несправних.

Задача № 12.8

Друкарці потрібно надрукувати текст, що містить 8000 слів, які складаються з 4-х і більше літер. Імовірність зробити помилку в кожному із цих слів дорівнює 0,01. Яка імовірність того, що при друкуванні буде зроблено не більше 90 помилок?

ТЕМА 13. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Контрольні питання

1. Що являє собою модель випадкового експерименту?
2. Дайте означення генеральної сукупності.
3. Дайте означення випадкової вибірки.
4. Що називається реалізацією випадкової вибірки?
5. У чому полягає задача точкового оцінювання?
6. У чому полягає задача інтервального оцінювання?
7. Дайте означення точкової оцінки.
8. Перелічіть основні властивості точкової оцінки.
9. Яка оцінка називається незміщеною?
10. Яка оцінка називається слушною?
11. Яка оцінка називається ефективною?
12. Як перевіряється слушність оцінки?
13. Як визначається абсолютна помилка точкового оцінювання?
14. Запишіть формулу для оцінки математичного сподівання.
15. Чому дорівнює дисперсія оцінки математичного сподівання?
16. Запишіть формулу для оцінки дисперсії при відомому математичному сподіванні.
17. Чому дорівнює дисперсія оцінки дисперсії при відомому математичному сподіванні?

Задача № 13.1

Вибірка задана у вигляді розподілу частот:

x_k	0	2	4	6	8
N_k	15	8	10	14	13

Знайти розподіл відносних частот.

Задача № 13.2

Дано розподіл вибірки:

x_k	50	51	52	53
N_k	4	7	9	2

Знайти оцінку математичного сподівання.

Задача № 13.3

Дано розподіл вибірки:

x_k	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
N_k	10	3	7	5	9	8	5

Знайти оцінку математичного сподівання.

Задача № 13.4

При п'яти незалежних дослідах по вимірюванню напруги отримані наступні результати: 26 В; 24,3 В; 25,5 В; 26,4 В; 25,8 В.

Знайти оцінку математичного сподівання.

Задача № 13.5

Дано розподіл вибірки:

x_k	19	21	23	25
N_k	5	10	15	10

Знайти зміщену та незміщену оцінки дисперсії.

Задача № 13.6

Дано розподіл вибірки:

x_k	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
N_k	2	6	8	9	7	3

Знайти зміщену й незміщену оцінки дисперсії.

Задача № 13.7

При об’ємі вибірки $N = 40$ та відомій незміщеній оцінці дисперсії $\hat{D} = 5$ знайти зміщену оцінку дисперсії.

Задача № 13.8

При об’ємі вибірки $N = 150$ й відомій зміщеній оцінці дисперсії $\hat{D}_{\text{çì}} = 10$ знайти незміщену оцінку дисперсії.

Задача № 13.9

Є вибірка випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона з параметром λ: 1; 2; 4; 1; 1; 2; 3; 6; 2; 4; 5; 5; 4; 1; 4.

Знайти точкову оцінку параметра λ.

Задача № 13.10

Кількість голів, забитих футбольною командою в одному матчі чемпіонату має наступний розподіл частот:

x_k	0	1	2	3	4	5
N_k	2	10	11	3	3	1

Знайти незміщену оцінку дисперсії.

Задача № 13.11

Вважаючи, що кількість голів, забитих футбольною командою в одному матчі, розподілена за законом Пуассона з параметром λ, знайти оцінку даного параметра методом моментів по заданому розподілу частот:

x_k	0	1	2	3	4	5
N_k	1	5	5	6	3	2

Задача № 13.12

Знайти точкову оцінку параметра p біноміального розподілу при $n = 5$ по заданому розподілу частот:

x_k	0	1	2	3
N_k	1	8	6	5

Задача № 13.13

Знайти точкову оцінку параметра q біноміального розподілу при $n = 8$ по заданому розподілу частот:

x_k	0	1	2	3
N_k	6	9	2	2

Задача № 13.14

Знайти точкову оцінку параметра λ показникового розподілу по наявній вибірці: 1,78; 0,03; 1,03; 3,02; 0,28; 0,11; 1,25; 1,38; 0,07; 2,03; 0,06; 0,35; 0,17; 1,56; 0,79.

Задача № 13.15

Знайти методом моментів точкові оцінки параметрів a і b рівномірного розподілу по заданій вибірці: 0,92; 1,16; 1,17; 1,45; 0,69; 0,61; 1,07; 1,47; 0,52; 1,37; 0,53; 1,02; 0,69; 1,21; 0,75.

Задача № 13.16

Знайти методом моментів точкові оцінки параметрів m і σ нормального розподілу по заданій вибірці: -0,15; -2; 0,68; 0,93; -1,22; 2,29; 2,28; 0,44; 0,99; 0,76; 0,22; 1,59; -0,38; 3,77; 0,29.

Задача № 13.17

Час між поломками окремих блоків системи розподілений за показниковим законом. Оцінити параметр λ показникового розподілу по наявній вибірці (у годинах): 14; 47; 142; 2; 44; 147; 38; 41; 200; 379; 134; 215; 267; 16; 171.

Задача № 13.18

Відхилення від цілі при стрільбі розподілене за нормальним законом. Оцінити параметри m та σ нормального розподілу по заданій вибірці (у метрах): 0,11; 1,07; 0,06; -0,09; -0,83; 0,29; -1,34; 0,71; 1,62; -0,69; 0,86; 1,25; -1,59; -1,44; 0,57; -0,4; 0,69; 0,82; 0,71; 1,29.

Задача № 13.19

Довжини стрижнів після обробки на верстаті мають рівномірний розподіл. Знайти параметри a та b рівномірного розподілу по заданій вибірці (у сантиметрах): 42,03; 42,73; 42,54; 42,28; 42,37; 42,01; 42,89; 42,87; 42,25; 42,57; 42,16; 42,59; 42,33; 42,65; 42,86.

Задача № 13.20

Кількість автомобілів, що проїхали через контрольний пункт за добу, описується розподілом Пуассона. Оцінити параметр λ цього розподілу по наявній вибірці: 30; 30; 24; 43; 23; 33; 28; 29; 24; 29.

Задача № 13.21

Число спрацьовувань пристрою при подачі на його вхід $n=5$ імпульсів за одиницю часу описується біноміальним розподілом. Оцінити параметри даного розподілу по наступній вибірці: 2; 2; 2; 0; 2; 3; 1; 3; 3; 1.

Задача № 13.22

Знайти емпіричну функцію розподілу при даному розподілі відносних частот:

x_k	0	1	2	3
$\hat{p}_k$	0,12	0,25	0,48	0,15

Задача № 13.23

Знайти емпіричну функцію розподілу при даному розподілі частот:

x_k	15	17	20	24
N_k	41	29	18	12

Задача № 13.24

Знайти рекомендовану кількість інтервалів гістограми для об'ємів вибірки $N = 500$, $N = 1500$, $N = 5000$.

Задача № 13.25

Побудувати полігон частот по даному розподілу вибірки:

x_k	100	105	110	115
N_k	25	17	13	10

Задача № 13.26

Побудувати полігон відносних частот по даному розподілі вибірки:

x_k	99	100	101	102
N_k	3	6	11	20

Задача № 13.27

Побудувати гістограму частот при даному розподілі вибірки:

Номер інтервалу, k	Границі інтервалу, $x_k - x_{k+1}$	Сума частот варіант інтервалу, N_k
1	0-2	2
2	2-4	15
3	4-6	33
4	6-8	20
5	8-10	5

Задача № 13.28

Побудувати гістограму частот при даному розподілі вибірки:

Номер інтервалу, k	Границі інтервалу, $x_k - x_{k+1}$	Сума частот варіант інтервалу, N_k
1	3-7	5
2	7-11	12
3	11-15	13
4	15-19	22
5	19-23	14
6	23-27	4

Задача № 13.29

Побудувати гістограму частот, розбивши інтервал значень на 6 груп при заданій вибірці:

1	3	4	2	2	2	4	2	2	3
1	5	3	4	2	3	1	3	0	3
3	0	3	6	3	3	4	4	4	1
2	2	4	3	3	1	1	4	1	1
0	3	4	3	5	3	2	3	1	1.

Задача № 13.30

Побудувати гістограму відносних частот по даному розподілі вибірки:

Номер інтервалу, k	Границі інтервалу, $x_k - x_{k+1}$	Сума частот варіант інтервалу, N_k
1	5-10	55
2	10-15	40
3	15-20	30
4	20-25	25
5	25-30	20

Задача № 13.31

Побудувати гістограму відносних частот по даному розподілі вибірки:

Номер інтервалу, k	Границі інтервалу, $x_k - x_{k+1}$	Сума частот варіант інтервалу, N_k
1	2-5	10
2	5-8	20
3	8-11	40
4	11-14	25
5	14-17	15
6	17-20	7
7	20-23	3

Задача № 13.32

Побудувати гістограму відносних частот, розбивши інтервал значень на 5 груп по заданій вибірці:

3	2	2	2	4	1	4	4	3	2
4	3	3	2	4	2	1	2	5	2
3	3	2	2	2	2	3	4	1	4
4	2	1	2	3	4	0	2	3	4
4	1	3	2	3	3	4	1	2	1.

Задача № 13.33

Розрахувати границі інтервалів гістограми при об'ємі вибірки $N = 500$, якщо $x_{\min} = -3$, $x_{\max} = 12$.

Задача № 13.34

Розрахувати границі інтервалів гістограми при об'ємі вибірки $N = 1000$, якщо $x_{\min} = 0{,}5$, $x_{\max} = 22{,}5$.

Задача № 13.35

Знайти методом максимальної правдоподібності оцінку параметра λ розподілу Пуассона.

Задача № 13.36

Знайти методом максимальної правдоподібності оцінку параметра λ показникового розподілу.

Задача № 13.37

Знайти методом максимальної правдоподібності оцінку параметрів m і σ нормального розподілу.

Задача № 13.38

По заданому розподілу частот визначити оцінку коефіцієнта варіації:

x_k	0	0,5	1	1,5	2
N_k	7	12	11	8	2

Задача № 13.39

По заданому розподілу частот визначити оцінку коефіцієнта асиметрії:

x_k	-1	0	1	2
N_k	10	15	5	5

Задача № 13.40

По заданому розподілу частот визначити оцінку коефіцієнта ексцесу:

x_k	8	9	10	11
N_k	4	6	6	4

ЛІТЕРАТУРА

Підручники

1. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: Учебник. – Изд. 8-е, испр. и доп. – М.: Едиториал УРСС, 2005. – 448 с.
2. Бабак В.П., Марченко Б.Г., Фриз М.Є. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика: Підручник для вузів. – К.: Техніка, 2004. – 288 с.
3. Ширяев А.Н. Вероятность: учеб. пособ. для студ. вузов, обуч. по спец. «Математика», «Прикладная математика», «Физика». – М.: Наука, 1989. – 640 с.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и её инженерные приложения. – М.: Наука, 2000. – 480 с.
5. Письменный Л.Д. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 288 с.
6. Чернова Н.И. Теория вероятностей: Учебное пособие. – Новосибирск: СибГУТИ, 2009. – 128 с.
7. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник / Под ред. В.А. Колемаева. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 302 с.
8. Герасимович А.И. Математическая статистика. Учеб. пособие для инж.-техн. и экон. спец. втузов. –2-е изд., перераб. и доп. – Мн.: Выш. школа, 1983. – 279 с.
9. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник. У 2 ч. — Ч. І. Теорія ймовірностей. — К.: КНЕУ, 2000. – 304 с.
10. Жлуктенко В.І., Наконечний С.І., Савіна С.С. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч.-метод. посібник: У 2-х ч. — Ч. ІІ. Ма-

тематична статистика. – К.: КНЕУ, 2001. – 336 с.

Задачники

11. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: Учебное пособие для студентов вузов. – 9-е узд., стер. – М.: Высш. шк., 2004. – 404 с.
12. Маценко П.К., Селиванов В.В. Руководство к решению задач по теории вероятностей: Учебное пособие. – Ульяновск: УлГТУ, 2000. – 99 с.
13. Теория вероятностей в примерах и задачах: Учеб. пособие / В.А. Колемаев, В.Н. Калинина, В.И. Соловьёв и др. – М.: ГУУ, 2001. – 87 с.
14. Жалдак М.И., Квитко А.Н. Теория вероятностей с элементами информатики: Практикум: Учеб. пособие / Под общ. ред. М.И. Ядренко. – К.: Выща шк., 1989. – 263 с.
15. Каніовська І.Ю. Теорія ймовірностей у прикладах і задачах: Навч. посіб. – 2-ге вид., виправл. і доповн. – К.: ІВЦ "Видавництво «Політехніка»", ТОВ " Фірма «Періодика»", 2004. – 156 с.
16. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Сборник задач по теории вероятностей: Учеб. пособие для вузов – Изд.2-е, испр. и доп. – М.: Наука, 1989. – 320с.
17. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей: Учеб. пособие для студ. вузов- 5-е изд., испр. - М.: Издательский центр «Академия», 2003.- 448 с.
18. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей: Учеб. пособие для вузов. – 2-е узд., доп. – М.: Высш. шк., 1994. – 112 с.
19. Турчин В.М. Теорія ймовірностей: Основні поняття, приклади, задачі: Навч. посіб. – К.: Вид-во А.С.К., 2004. – 208 с.